誤差情報を含む浮動小数点表現と
これを用いた数値演算論理

瀬尾　雄三

シグナル・プロセス・ロジック

1 はじめに

多数の演算器を用いて並行処理を行うパイプライン演算装置は、高いスループットが得られることから、情報記録や画像処理の分野で用いられている．科学技術計算の分野でも、GPU の一般計算への利用や特定問題専用の演算器などの形で、パイプライン処理の利用が拡大している．

並列処理は、多数の演算器を用いるため、論理が大規模となる短所がある．我々は、有効桁に着目して信号線のビット幅を縮小し、論理を簡素化する手法の検討を進めてきた[1, 2].

しかし、有効桁という粗い指標では誤差を正確に表現できず、有用な情報を失わないように論理を構成すると後段に進むに従って誤差が増大する．また、誤差を支配する主要項がキャンセルされる場合（本論ではこれを「誤差キャンセル」と呼ぶ）、後段で有効となる情報が中段で無効桁として扱われて失われる問題もある [3].

小規模な FPGA に実装される演算器では人手で演算過程を最適化して対処することも可能だが、今回、これを機械的に処理する手法について検討したので、その結果を報告する．

2 誤差情報を含む浮動小数点表現

図 1 に今回提案する浮動小数点表現の構成要素を示す．浮動小数点表現は IEEE754 様式が一般的だが、多数の演算器を用いる際は個々の演算器に簡素な構成が要求される．そこで、共に整数である仮数部 M と指数部 X を用い、$M\ 2^X$ で数値を表すこととした．数値の型は M と X の最大値と最小値で規定し、それぞれのビット幅を 1 bit 単位で指定できるようにした．異常表示には独立の信号線を用いて論理を簡素化している．

誤差は、各変数に含まれる互いに独立な誤差要因を要素とするベクトルで扱う．a と b が独立な誤差を含む入力であれば、これに含まれる誤差をそれぞれ $\boldsymbol{e}_a=(e_a,\ 0)$、$\boldsymbol{e}_b=(0,\ e_b)$ と表す．加算結果 r=a+b の誤差分散 v_r は次式で与えられる．

(1) $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_a + \boldsymbol{e}_b = (e_a, 0) + (0, e_b) = (e_a, e_b)$

(2) $v_r = \boldsymbol{e}_r^2 = e_a^2 + e_b^2$

この手法では、r=a+a には $\boldsymbol{e}_r=(2e_a,0)$ より $v_r=4e_a^2$ と、誤差の独立性に応じた誤差分散が得られる．

演算結果の仮数部に、有効桁に加えて S bit の無効桁を含めるには、誤差分散が 4^{X+S-1}~4^{X+S} の範囲となるように指数部 X を定めればよい．

この場合、誤差の各要素の絶対値は 2^{X+S} 未満であることが保証されるので、誤差の指数部は値の指数部と兼用し、仮数部 $\boldsymbol{E}=(E_1,E_2,\cdots)$ のみを浮動小数点表現に含める．誤差の仮数部には F 桁の小数部を含め、$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{E}\ 2^{X-F}$ で表す．

3 各種演算結果に含まれる誤差

各種演算結果の誤差は次のように計算される．

(3) $r = a + b$　: $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_a + \boldsymbol{e}_b$

(4) $r = a - b$　: $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_a - \boldsymbol{e}_b$

(5) $r = a * b$　: $\boldsymbol{e}_r = b\ \boldsymbol{e}_a + a\ \boldsymbol{e}_b$

(6) $r = a / b$　: $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_a / b - a\ \boldsymbol{e}_b / b^2$

(7) $r = \sqrt{a}$　: $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_a / (2\sqrt{a})$

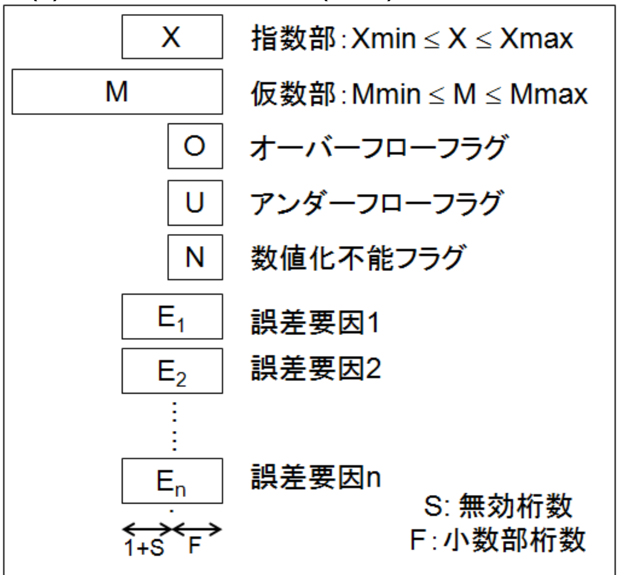

図1.誤差情報を含む浮動小数点表現

Floating-Point Format Including Error Information and its Application for Numerical Operation Logic
Yuzo SEO (Signal Process Logic Inc.)

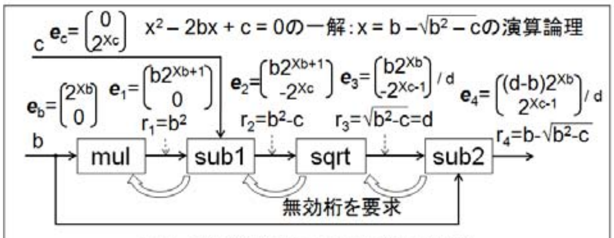

図2. 演算過程における値と誤差

4 誤差キャンセルの検出とその対応

演算結果の誤差分散は誤差要因の自乗和で与えられる．通常は演算により誤差分散が増大するが、誤差のキャンセルが発生すると演算結果の誤差分散は入力の誤差分散よりも低下する．

演算結果の誤差分散が管理範囲以下となる場合は、指数値を減少し仮数部のビット幅を増加して誤差分散を管理範囲に収めればよいが、このために無効桁の入力が必要となる場合が多い．

そこで、演算論理の形成に先立って、演算過程での値と誤差の伝播をシミュレートし、各演算器出力に要求される無効桁数を求めておく．

図 2 に二次方程式一つの解を演算する過程での値と誤差の推移を示す．図中、mul は乗算器、sub は減算器、sqrt は平方根演算器であり、入力 b、c の各組み合わせに対して(4)、(5)、(7)式により値 r_k と誤差ベクトル $\boldsymbol{e}_k$ を算出する．

b が正の場合、減算器 sub2 で誤差のキャンセルが発生する．とくに $X_b \geqq X_c$ の場合には、出力の誤差分散 $\boldsymbol{e}_4^2$ を管理範囲に収めるために入力に無効桁が必要となる．この場合には、前段に必要な数の無効桁を追加して出力するよう要求を送る．前段が無効桁を出力するためには前段の入力にも無効桁が必要であり、データフローを遡る形で各演算器出力に必要な無効桁を順次設定することとなる．

誤差のキャンセルは、アルゴリズムを工夫することで避けられる場合も多い．上の例では、b が正の場合は式 $x=c\ /\ (b+\sqrt{b^2-c})$を用いることで高精度解が得られることが知られている．

アルゴリズム最適化の手法は、一般の計算問題において必ずしも自明ではない．そこで、誤差のキャンセルが検出された場合は、警告メッセージを出力して、論理設計者によるアルゴリズムの見直しを促すようにする．

5 数値演算論理における誤差情報の利用

誤差情報を扱う当初の目的は、パイプライン演算器の構成に必要な論理資源の圧縮であったが、値とこれに含まれる誤差が同時に得られる数値演算装置には、他にも利点がある．

第一に、演算結果が信頼に足るものであることが保証される．これは、とくに高信頼性が要求される制御装置等において有利な点であろう．

第二に、一般的な浮動小数点数をゼロと比較することは意味をなさないが、誤差分散の平方根と値を比較することで、ゼロではないことを統計的に判定することができる．

その他、複数のアルゴリズムに基づく演算器の出力から誤差の少ないものを選択する際にも、誤差情報は利用できよう．

6 最大転送モード

誤差情報のビット幅は値の仮数部に比べて小さいが、これを演算するための論理を実装する以上、装置の複雑化は避けられない．演算実行中に誤差情報を利用しないのであれば、誤差を演算する論理の実装は省略することもできる．

この場合、論理形成に先立つシミュレーションで各演算器出力のビット幅を決定し、演算に際しては、出力信号線の幅に納まるように演算結果を加工すればよい．

7 まとめ

数値に含まれる誤差情報を用いて数値演算処理の論理規模を最小化する手法について検討し、互いに独立な誤差要因を要素とするベクトルを浮動小数点表現に含めることで、誤差のキャンセルが生じた際にも精度が確保される論理形成手法を開発した．今後は、これを応用した演算論理設計支援システムを実用化する計画である．

この手法は、一般の科学技術計算における浮動小数点演算にも応用することができよう．今回提案した浮動小数点表現を用いて値と誤差を同時に演算するように CPU を構成すれば、計算速度を落とすことなく、より安全な浮動小数点演算が可能となる．このためのハードウエアの開発は、今後の検討課題の一つである．

参考文献

[1] 瀬尾雄三：浮動小数点処理を含む論理設計支援システム, 情報処理学会シンポジウムシリーズ, Vol. 2010, No. 7, pp. 3-8, 2009

[2] 瀬尾雄三：パイプライン処理のための演算仕様記述言語 mhdl とその処理系, 情報処理学会シンポジウムシリーズ, Vol. 2012, No. 5, pp. 115-120, 2012

[3] 佐々木建昭, 加古富志雄：悪条件性を推定する浮動小数グレブナー基底の計算法, 数理解析研究所講究録, Vol. 1652, pp. 33-43, 2009