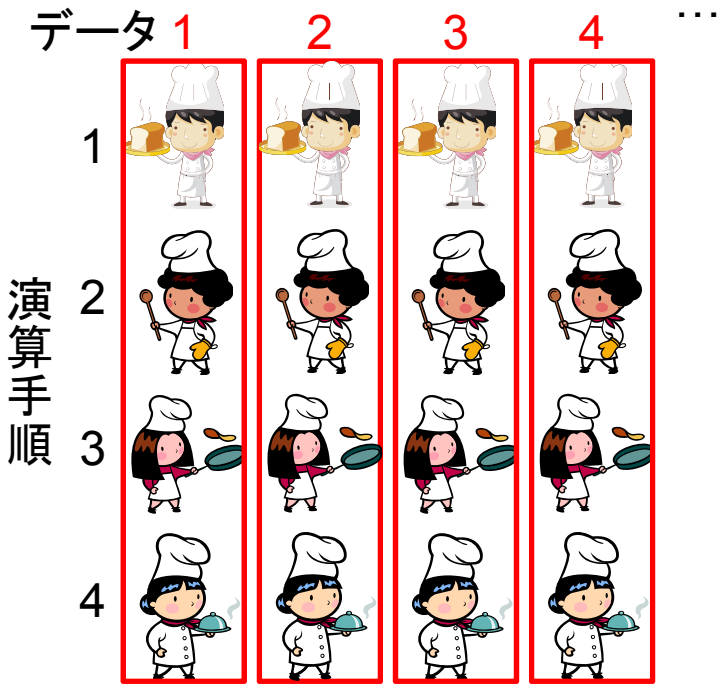
要因別誤差追跡に基づく
安全な数値演算論理の自動設計

シグナル・プロセス・ロジック株式会社
瀬尾雄三

本研究の目的：パイプライン演算器の自動設計

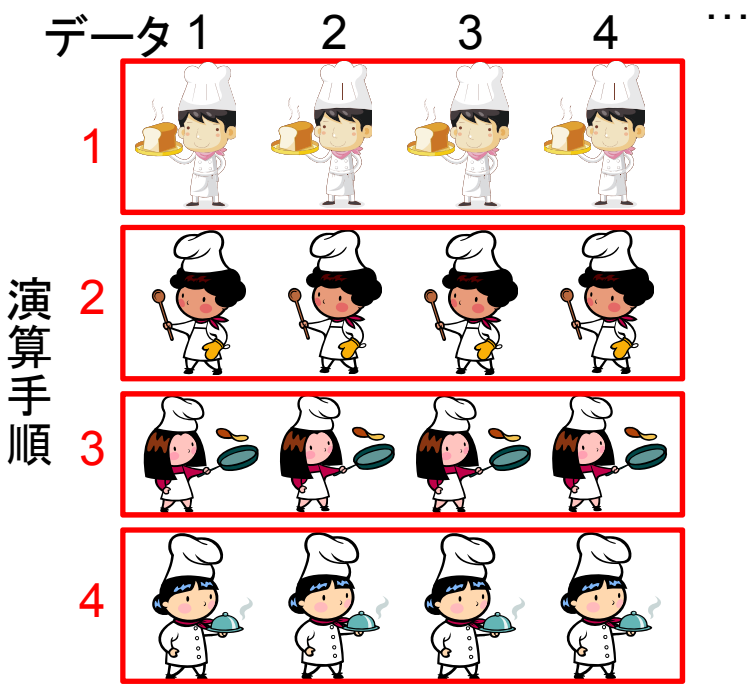
- FPGAを用いた高速数値演算装置はパイプライン構成が一般的

メニーコア：データ毎に
異なるCPUで処理する



複雑だがすべてが同一

パイプライン：演算手順毎に
異なる演算器で処理する



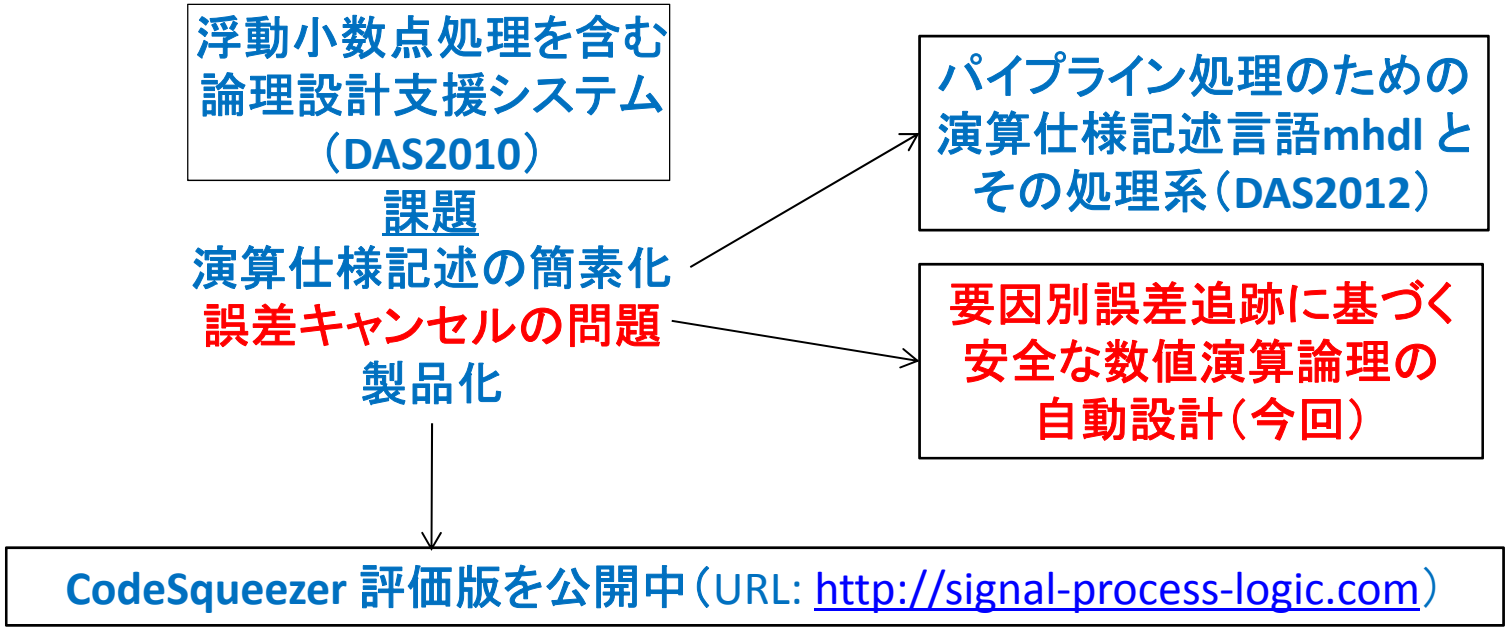
簡素だが各々異なる

高速処理を安価に実現！

ツールの開発

数値演算論理の最適設計：検討の流れ

・有効桁に着目して、必要最小のビット幅で演算論理を形成する手法をDAS2010で発表：残された課題は、
- 演算仕様記述の簡素化：演算仕様記述言語（DAS2012）
- 誤差キャンセルの問題：今回発表
- 論理設計支援システムとしての製品化：評価版を公開中



誤差キャンセルはなぜ問題か

(1) $x^2 - 2\,b\,x + c = 0$

(2) $d = \sqrt{b^2 - c}$

(3) $x_1 = b + d$

(4) $x_2 = b - d$

- (1)式の二つの解x_1およびx_2は(2)～(4)式で与えられる
- (3)、(4)のいずれかでbに含まれる誤差がキャンセルされる
  (bの符号に依存)
- b^2の誤差がcに比べて大きい場合
  - (2)式：bの誤差がdの有効桁を決定する
  - (3, 4)式：bの誤差がキャンセルされるが
    cに含まれる情報は既に失われている
- 対処：後段で誤差がキャンセルする場合、dに無効桁を
  含め、cに含まれる情報を後段に伝達する

要因別誤差追跡の考え方

(1) $x^2 - 2\,b\,x + c = 0$　　(3) $x_1 = b + d$

(2) $d = \sqrt{b^2 - c}$　　(4) $x_2 = b - d$

- (3, 4)式でbの誤差がキャンセルされることを検出するには、変数dに含まれるb起因の誤差の大きさを知る必要がある
- dの誤差要因には、変数bと変数cがある
- これらを識別可能とするため、要因別の誤差情報を扱う
  - 基本演算を定義しておけばdoubleと同様に扱うことが可能

```
public ref class Real
{
public:
        double r;
        array<double>^ e;
};
```

基本演算の定義

```
Real^ operator+(Real^ src);
Real^ operator– (Real^ src);
Real^ operator*(Real^ src);
Real^ operator/(Real^ src);
Real^ sqrt(Real^ src);
```

演算結果に含まれる誤差

- 各種演算の結果に含まれる誤差は下式で計算される
  これらは、誤差の高次項を無視して導き出されている
- 0どうしの乗算においては誤差の高次項が無視できない
  → $\boldsymbol{\delta}$を追加：誤差の独立性より、異なる誤差要因の積は無視

a, b, rはReal型の値、cは誤差を含まない値（double）

(5) $r = a + b$: $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_a + \boldsymbol{e}_b$

(6) $r = a - b$: $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_a - \boldsymbol{e}_b$

(7) $r = c * a$: $\boldsymbol{e}_r = c\,\boldsymbol{e}_a$

(8) $r = a * b$: $\boldsymbol{e}_r = b\,\boldsymbol{e}_a + a\,\boldsymbol{e}_b + \boldsymbol{\delta}$

$\boldsymbol{\delta} = (e_{a1}\, e_{b1}, e_{a2}\, e_{b2}, \ldots)$

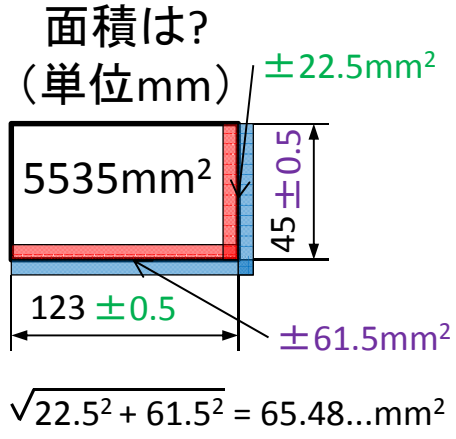
(9) $r = a / b$: $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_a / b - a\,\boldsymbol{e}_b / b^2$

(10) $r = \sqrt{a}$: $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_a / (2\sqrt{a})$

(11) $r = a^c$: $\boldsymbol{e}_r = c\,a^{c-1}\boldsymbol{e}_a$

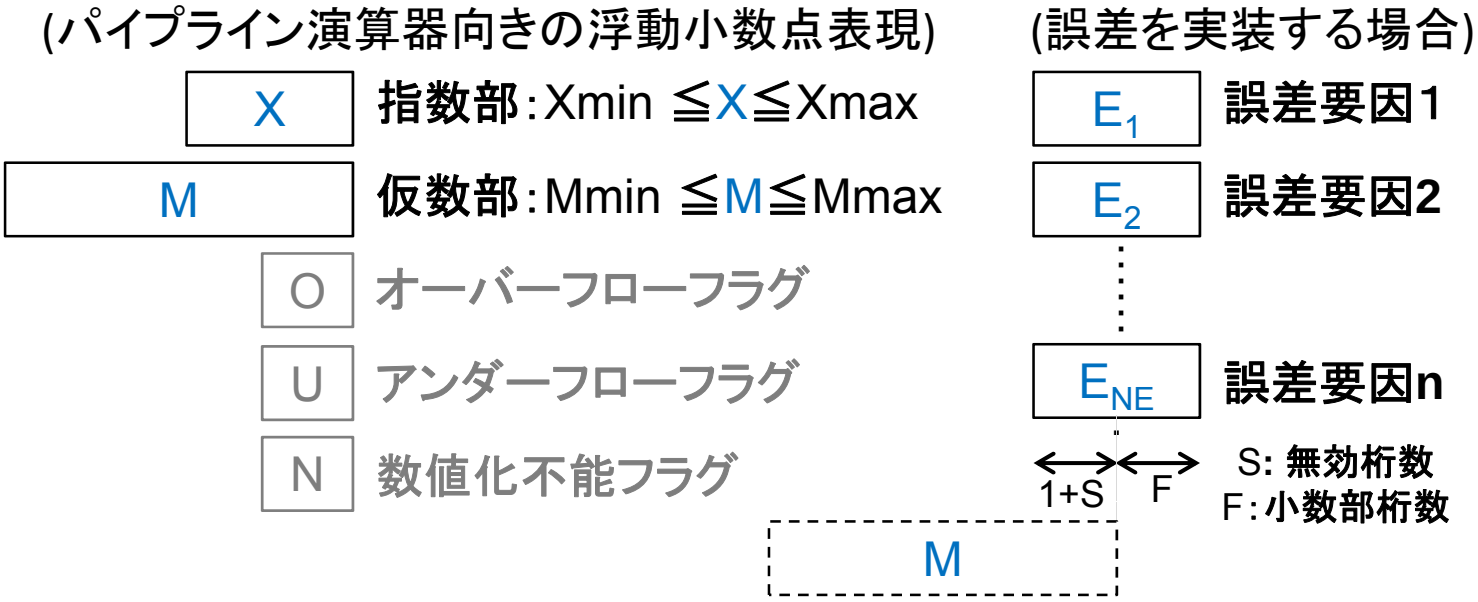
誤差と有効桁

- 誤差とは
  - 一般には扱う値と真値の差：計測誤差、ノイズ等を含む
  - 本論では量子化誤差で誤差を表現する：±½LSB
  - 個々の入力に対して誤差を設定することも可能
- 誤差：誤差分散（$e^2 \equiv \Sigma e_k^2$ ）の平方根εを誤差とみなす
- 重みが誤差以下の桁よりも下位は無効桁



浮動小数点数の実装と無効桁数の制御

- 値を仮数部Mと指数部Xを用いて$M \times 2^X$で表す
- 量子化誤差=0.5×2^Xより、誤差εが2^{X-1}~2^Xなら無効桁数は0
- 無効桁数をS bitとするにはεを2^{X+S-1}~2^{X+S}とするようXを定める
  指数部Xは $X = \log_2 \varepsilon - S$ で計算される（小数部は切捨て）
  （実際には、$X = \log_4 \varepsilon^2 - S$で計算。$\log_4$の整数部はビット幅/2）



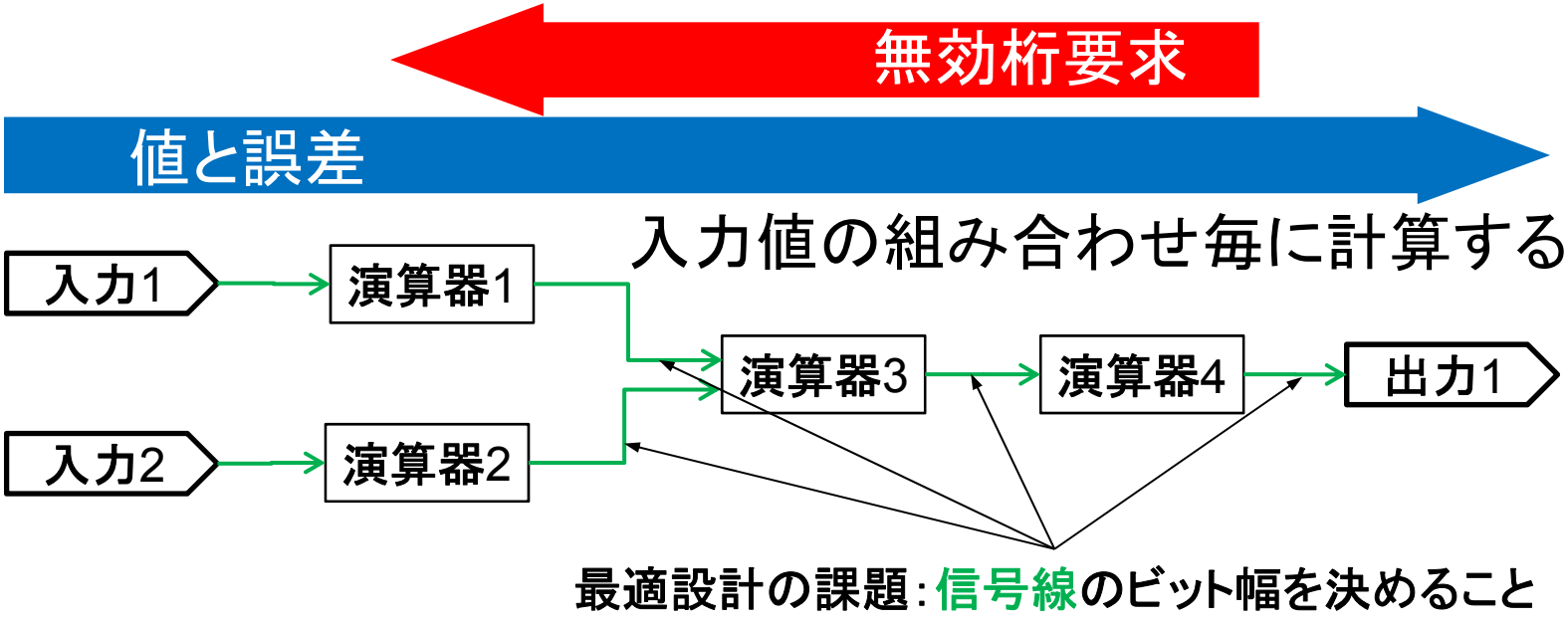
誤差キャンセルの検出

- 誤差のキャンセルは入力値の特定の組み合わせで発生
  → 事前のシミュレーションでチェックする
- 無効桁の調整：出力の指数部X設定→仮数部Mも決まる
- 出力仮数部への入力仮数部のLSB以下の影響をチェック
  → 影響するなら誤差キャンセルが問題を生じている
- 演算毎に誤差キャンセルの検出手法は異なる

演算結果の丸めを経ている場合のみ無効桁の増加が可能

誤差キャンセルへの対応

- 入力側から値と誤差を計算（入力値の組み合わせに対し）
- 入力仮数部の桁不足が検出されたら前段出力の無効桁を増加させる（後段から前段へと無効桁要求が伝播する）

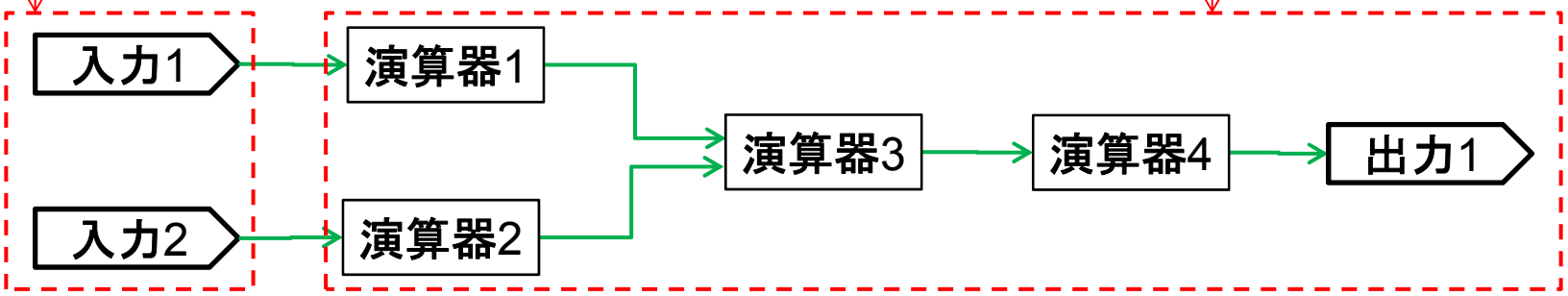


信号線のデータ構造

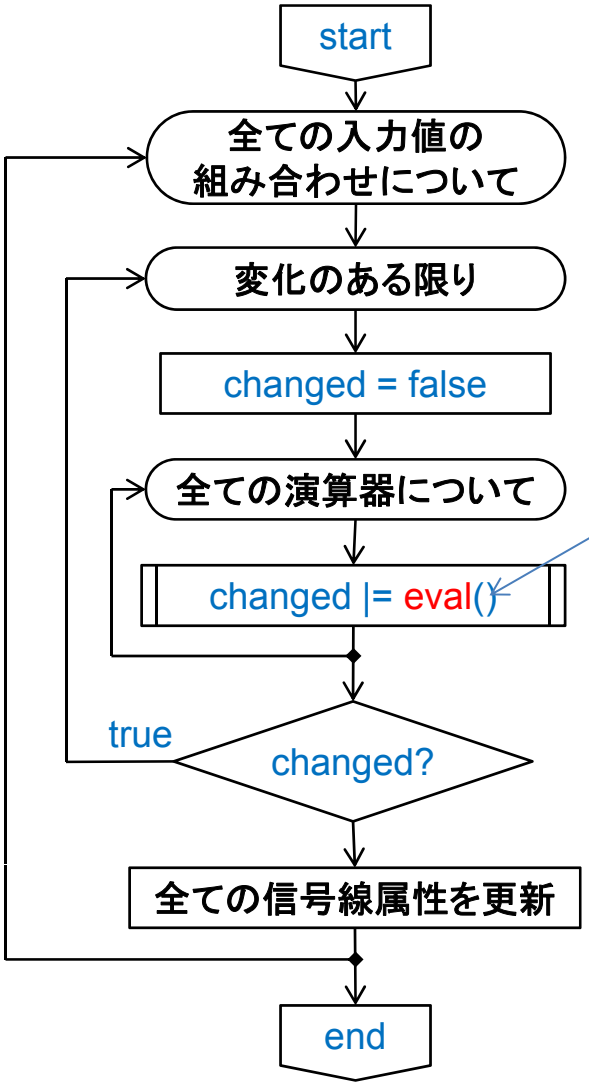
- 各入力値の組に対する値と誤差（シミュレーションで使用）
  - 値と誤差ベクトル（ Real型）
  - 信号線に表れた数値の仮数部と指数部の値
  - 信号線に要求される無効桁数
  - 無効桁増加可能フラグ : 丸めが行われていることを示す
- 実装する信号線の属性（全ての入力値に対応すべく設定）
  - 仮数部と指数部の最大値と最小値
  - 要求無効桁数と有効桁数の最大値（誤差実装時に使用）
- 異常信号線（オーバーフロー、アンダーフロー、数値化不能）
  - 異常信号線の有無と、存在する場合はその属性
- 接続関係の定義
  - 信号源となる演算器
  - 信号の行き先となる演算器のリスト

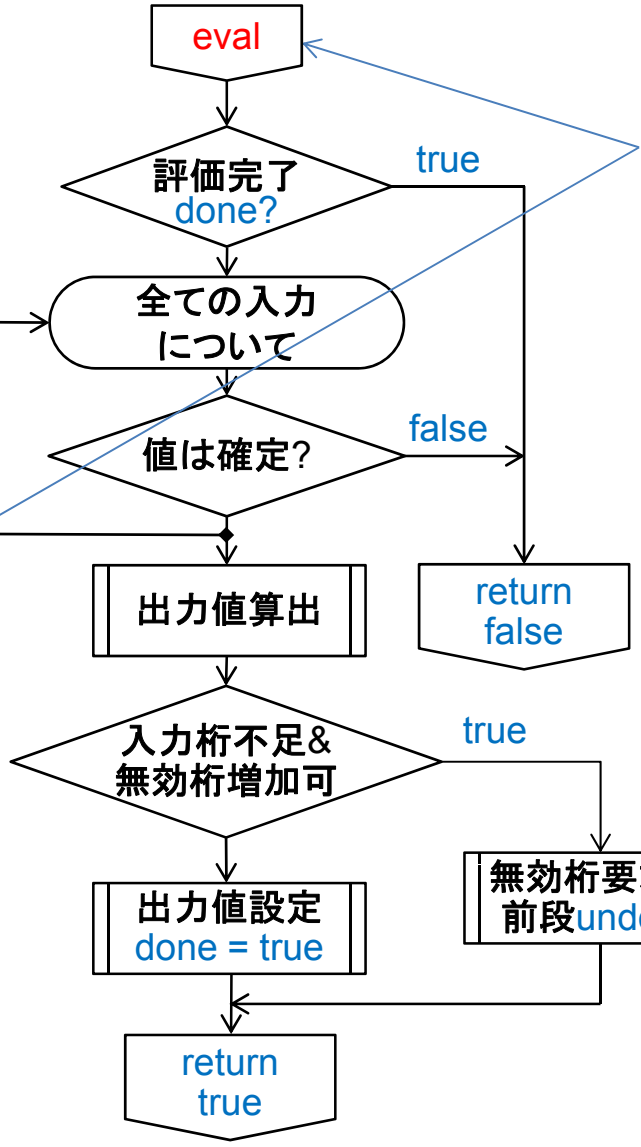
演算仕様のモデル化

- 演算器のデータ構造
  - 入力に接続される信号線のリスト
  - 出力に接続される信号線のリスト
  - 値を評価する関数(eval)へのポインタ
  - 演算器をHDL記述に変換する関数へのポインタ
  - 作業完了（done）フラグ
- 演算仕様のモデル化
  - 外部入力信号線のリストと各信号線の属性
  - モデルに含まれる演算器と出力のリスト
  - 演算器入出力と信号線の接続関係



シミュレーション：処理の流れ



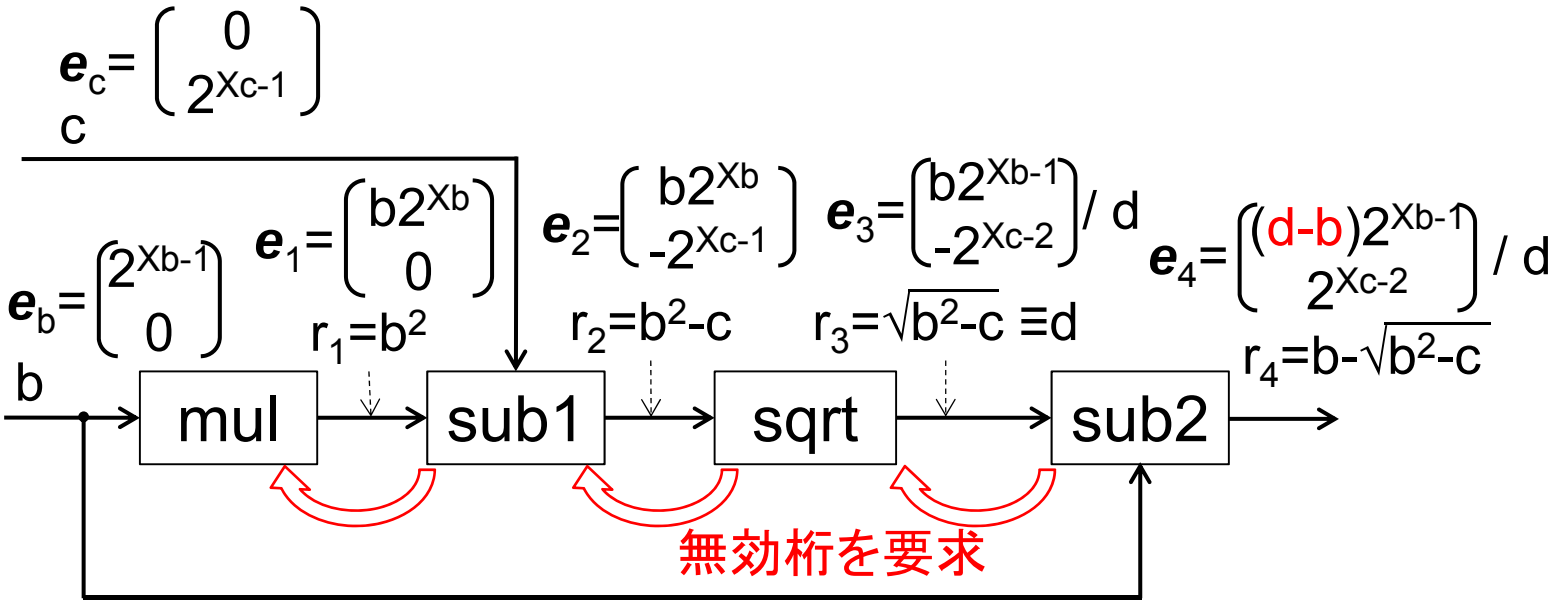


eval
演算器の種類ごとに
準備された関数で、
・演算器出力を算出し、
・入力桁不足を検査し、
・変化の有無を返す

undone
doneがtrue場合
・doneをfalseに戻し
・出力に接続された
演算器もundone

演算過程の一例

- $x^2 - 2\,b\,x + c = 0$の一解 $b-\sqrt{b^2-c}$を演算するフロー
- 入力値が決定している初段より順に値が設定される
- $\boldsymbol{e}_4$の1行目d－bで誤差のキャンセルが発生する
- 前段出力に無効桁を要求→前段の入力も桁不足が発生
- この結果、順次前段に無効桁要求が送られる



必要無効桁数の計算例（最終段）

- $r3 = \sqrt{b^2-c}$ に要求される無効桁数は下表の通りとなった
- bの仮数部M_bは1,000に、cの仮数部M_cは1,000,000に固定
- 指数部(X_b, X_c)を各々0から10まで振ってシミュレートした

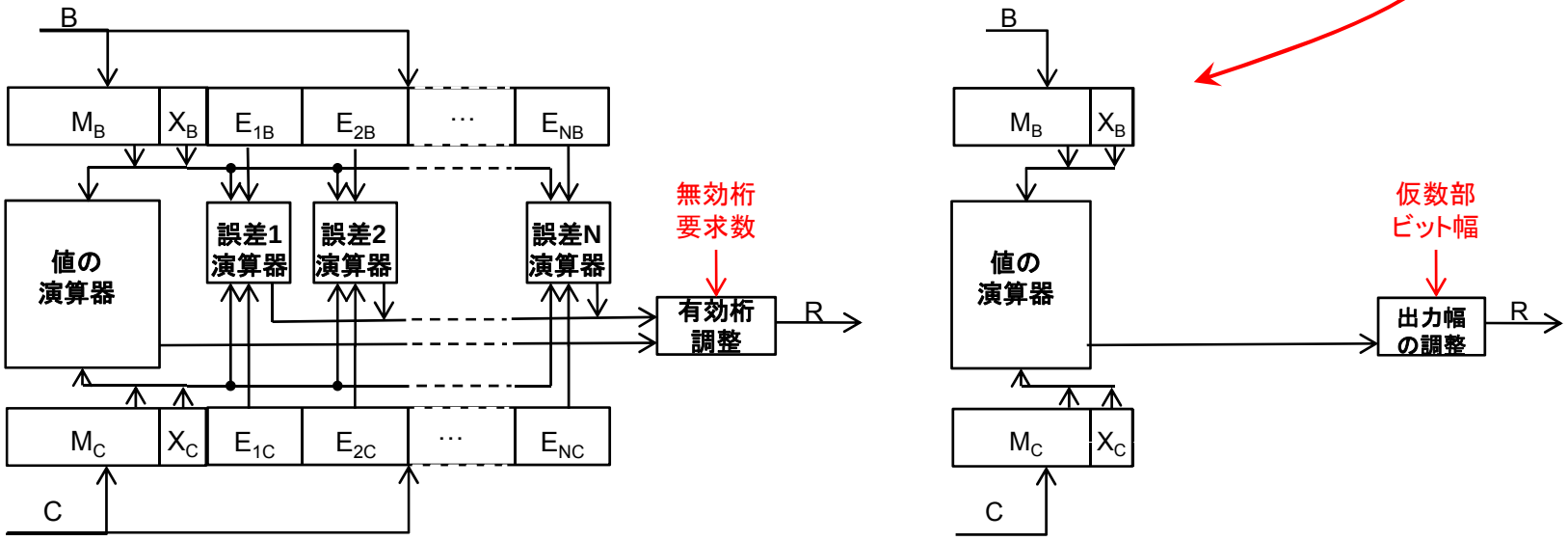
X_b \ X_c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
1	1	0	0	–	–	–	–	–	–	–	–
2	2	1	1	0	0	–	–	–	–	–	–
3	3	2	2	1	1	0	0	–	–	–	–
4	4	3	3	2	2	1	1	0	0	–	–
5	5	4	4	3	3	2	2	1	1	0	0
6	6	5	5	4	4	3	3	2	2	1	1
7	7	6	6	5	5	4	4	3	3	2	2
8	8	7	7	6	6	5	5	4	4	3	3
9	9	8	8	7	7	6	6	5	5	4	4
10	10	9	9	8	8	7	7	6	6	5	5

虚数解のためスキップ

- b^2とcの大小関係で無効桁必要数が与えられている

誤差情報の利用と最大伝送モード

- 実装演算論理で誤差情報を利用する場合
  - 誤差を表す信号線と誤差の演算論理を実装する
  - 演算器は出力に要求される無効桁数を出力する
- 実装演算論理には誤差情報が不要の場合
  - 誤差に係わる信号線と演算論理は実装しない
  - 出力の仮数部を信号線幅に収まるよう右シフトする
    （シフト数だけ指数部を増加させる）



まとめと今後の課題

- 誤差キャンセルの自動検出と機械的対応手法を提案した
  - 有効桁に着目した数値演算論理の最適化に有用
  - 一般の科学技術計算への応用も可能か
- 手法に関する課題：よりきめ細かな制御手法を検討する
  - 特異点に対する処理の適正化：ゼロの平方根など
  - 無効桁数の上限設定：桁不足による新たな誤差の導入
- 今後は、本手法を応用した数値演算論理設計支援ツールの開発を急ぎたい

ご清聴ありがとうございました